HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
INSTITUT FÜR PHYSIK

Elektrostatik/Magnetostatik (P2a, Teil 2), SS 2013

Vorlesung: Prof. Dr. H. Winter, Prof. Dr. I. Sokolov
Übungen: Dr. M. Busch, Dr. J. Seifert, C. Schmeltzer, Dr. A. Straube

URL: http://www.hu-pgd.de (→ Lehre → Elektrostatik/Magnetostatik)

Übungsblatt 8: δ-Funktion, Satz von Gauß und Stokes

Ausgabe: 04.06.2013 Abgabe: Vor Beginn der Übung am 11.06.2013

---

1. Aufgabe: (5 Punkte) Eindimensionale δ-Funktion

Die eindimensionale δ-Funktion kann wie folgt definiert werden:

$$\int_\alpha^\beta \delta(x-a) f(x) dx = \begin{cases} f(a) & \text{für } a \in (\alpha, \beta) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \tag{1}$$

wobei $f(x)$ eine differenzierbare Funktion ist. Damit folgt für $f(x) = 1$

$$\int_\alpha^\beta \delta(x-a) dx = \begin{cases} 1 & \text{für } a \in (\alpha, \beta) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}. \tag{2}$$

a) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$\delta(x-a) = \lim_{\eta \to 0} \frac{1}{\sqrt{\pi\eta}} \exp\left(\frac{-(x-a)^2}{\eta}\right)$$

die Gleichung (2) erfüllt.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$\delta(x-a) = \lim_{\eta \to 0} \frac{1}{\pi} \frac{\eta}{\eta^2 + (x-a)^2}$$

die Gleichung (2) erfüllt. Hinweis: Benutzen Sie das Integral

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right).$$

c) Zeigen Sie, ausgehend von Gleichung (1), dass $\delta(x-a) = \frac{d}{dx}\Theta(x-a)$. Dabei ist $\Theta(x)$ die Stufenfunktion, mit $\Theta(x) = 1$ für $x \geq 0$ und $\Theta(x) = 0$ sonst.

d) Zeigen Sie, dass aus Gleichung (1) folgende Identität abgeleitet werden kann

$$-f(x) \frac{d}{dx} \delta(x) = \delta(x) \frac{d}{dx} f(x).$$

[bitte wenden]

2. Aufgabe: (4 Punkte) Gaußscher Satz

a) Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes $\vec{a}(\vec{r})$ durch die Oberfläche einer Kugel mit Radius R und Mittelpunkt im Ursprung mit Hilfe des Gaußschen Satzes für folgende Fälle:

i) $\vec{a}(\vec{r}) = 3\vec{r}/r^2$

ii) $\vec{a}(\vec{r}) = (3z, x, 2y)$.

b) Schreiben Sie das Integral über eine geschlossene Fläche F

$$\oint_F \varphi(\vec{r}) d\vec{f} \tag{3}$$

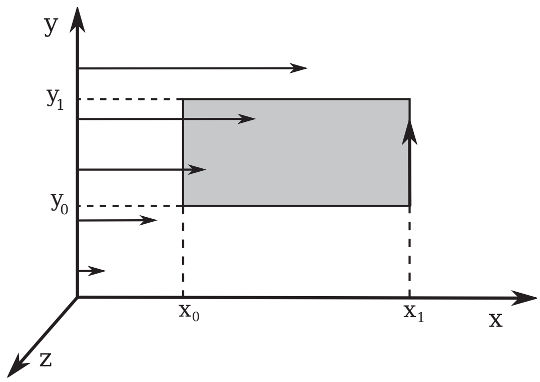
als Volumenintegral. Hinweis: Multiplizieren Sie (3) mit einem beliebigen Vektor und wenden Sie den Gaußschen Satz an.

c) Schreiben Sie das Integral über eine geschlossene Fläche F

$$\oint_F [\vec{a}(\vec{r}) \times d\vec{f}]$$

als Volumenintegral. Hinweis: Gehen Sie wie bei (b) vor und nutzen Sie die Eigenschaft des Spatproduktes $\vec{a} \cdot [\vec{b} \times \vec{c}] = [\vec{a} \times \vec{b}] \cdot \vec{c}$.

3. Aufgabe: (3 Punkte) Orientiertes Umlaufintegral und Stokesscher Satz



a) Berechnen Sie das orientierte Umlaufintegral um eine ebene rechteckige Fläche in der xy Ebene (siehe Abbildung) entgegen dem Uhrzeigersinn in einem Strömungsfeld der Form $\vec{a}(\vec{r}) = \nu(y, 0, 0)$ direkt und mit Hilfe des Stokesschen Satzes. Verallgemeinern Sie das Ergebnis mit Hilfe des Stokesschen Satzes auf beliebige Umläufe.

b) Berechnen Sie direkt das orientierte Umlaufintegral (gegen den Uhrzeigersinn) für einen Kreis in der xy Ebene mit Radius R um den Ursprung in einem Vektorfeld der Form

$$\vec{a}(\vec{r}) = \frac{1}{x^2 + y^2}(-y, x, 0).$$

c) Berechnen Sie die Rotation des Vektorfeldes aus (b) für $\vec{r} \neq \vec{0}$. Finden Sie mit Hilfe des Ergebnisses aus (b) das Resultat von rot $\vec{a}$ bei $\vec{r} = \vec{0}$.