Rotationsbewegung

23. Januar 2013

Einführende Bemerkung: Diese Notizen enthalten nicht das ganze Material der entsprechenden Vorlesungen. Ihr Zweck ist es, die Notation zu standardisieren. Der Anlass dafür ist die Tatsache, dass in verschiedenen Büchern unterschiedliche Darstellungen vertreten sind! Einige Punkte sind in diesen Notitzen eingehender diskutiert, als es in den Vorlesungen möglich war, andere, die relativ klar erscheinen, dagegen, kürzer gefasst.

1 Trägheitstensor

In der Vorlesung haben wir einen Ausdruck für die kinetische Energie T_R eines um eine durch seinen Massenschwerpunkt verlaufende Drehachse rotierenden starren Körper ausgerechnet:

$$T_R = \sum_i m_i(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i).$$

Einen starren Körper haben wir dabei als eine Ansammlung von Massenpunkten i aufgefasst, deren relative Abstände zueinander sich im Laufe der Zeit nicht verändern.

Wenn wir das Vektorprodukt koordinatenweise Ausschreiben, so erhalten wir unter der Annahme

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{r}_i = \begin{pmatrix} x_{i,1} \\ x_{i,2} \\ x_{i,3} \end{pmatrix}$$

einen länglichen Ausdruck

$$\begin{aligned} T_R = \quad & \sum_i m_i \left[\omega_1^2(x_{i,2}^2 + x_{i,3}^2) + \omega_2^2(x_{i,1}^2 + x_{i,3}^2) + \omega_3^2(x_{i,1}^2 + x_{i,2}^2)\right. \\ & \left. - 2\omega_1\omega_2 x_{i,1}x_{i,2} - 2\omega_1\omega_3 x_{i,1}x_{i,3} - 2\omega_2\omega_3 x_{i,2}x_{i,3}\right]. \end{aligned}$$

Diesen können wir in eine kompakte Matrixform

$$T_R = \boldsymbol{\omega}^T \hat{I} \boldsymbol{\omega}$$

umschreiben mit der *symmetrischen* Matrix

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} \sum_i m_i(x_{i,2}^2 + x_{i,3}^2) & \sum_i m_i x_{i,1}x_{i,2} & \sum_i m_i x_{i,1}x_{i,3} \\ \sum_i m_i x_{i,1}x_{i,2} & \sum_i m_i(x_{i,1}^2 + x_{i,3}^2) & \sum_i m_i x_{i,2}x_{i,3} \\ \sum_i m_i x_{i,1}x_{i,3} & \sum_i m_i x_{i,2}x_{i,3} & \sum_i m_i(x_{i,1}^2 + x_{i,2}^2) \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix heißt *Trägheitstensor* des Körpers. Seine Elemente können wir in der kompakteren Form $I_{kl} = \sum_i m_i(\mathbf{r}_i^2 \delta_{kl} - x_{i,k}x_{i,l})$ schreiben, mit dem KRONECKER-Symbol

$$\delta_{kl} = \begin{cases} 1, & k = l \\ 0, & k \neq l. \end{cases}$$

Für kontinuierliche Massenverteilungen kann man von Summen zu Integralen übegehen.

Wir haben uns auch überzeugt, dass die Verbindung zwischem dem Drehimpulses $\mathbf{L}$ und $\boldsymbol{\omega}$ durch die gleiche Matrix gegeben ist:

$$\mathbf{L} = \hat{I}\boldsymbol{\omega}.$$

I.A. ist $\mathbf{L}$ nicht parallel zu $\boldsymbol{\omega}$, was die Rechnungen sehr komplex machen kann. Für einige Richtungen von $\boldsymbol{\omega}$ ist jedoch die Parallelität gegeben, nämlich dann, wenn

$$\hat{I}\boldsymbol{\omega} = \lambda\boldsymbol{\omega},$$

d.h. wenn $\boldsymbol{\omega}$ ein Eigenvektor der Matrix $\hat{I}$ ist. Eine symmetrische $(n \times n)$-Matrix besitzt immer n zueinander orthogonale Eigenvektoren (in unserem Fall $n = 3$). Wenn wir die Achsen des Koordinatensystems parallel zu diesen Eigenvektoren wählen, entkoppeln sich die Komponenten von $\mathbf{L}$:

$$\begin{aligned} L_1 &= I_{11}\omega_1 \\ L_2 &= I_{22}\omega_2 \\ L_3 &= I_{33}\omega_3. \end{aligned}$$

Der Übergang vom anfänglichen Koordinatensystem zu diesem neuen Koordinatensystem erfolgt durch Drehung der Koordinatensystems.

2 Mathematischer Einschub I: Eigenwerte und Eigenvektoren symmetrischer Matrizen

Eine symmetrische $(n \times n)$-Matrix M mit reellen Elementen besitzt n reelle Eigenwerte. Die dazugehörigen Eigenvektoren sind ebenfalls reell. Die verschiedenen (normierten) Eigenvektoren sind zueinander orthogonal. Einige von diesen Aussagen werden im folgenden bewiesen.

Betrachten wir eine allgemeine symmetrische Matrix $\hat{M}$ mit reellen Einträgen. Für zwei beliebige Vektoren $\mathbf{x}_1$ und $\mathbf{x}_2$ gilt

$$\mathbf{x}_1^T \hat{M} \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_2^T \hat{M} \mathbf{x}_1. \tag{1}$$

Um das zu sehen, genügt es, Gl.(1) komponentenweise auszuschreiben:

$$\begin{aligned} \sum_i x_{1,i} \left(\sum_j M_{ij} x_{2,j} \right) &= \sum_{i,j} M_{ij} x_{1,i} x_{2,j} \\ &= \sum_{i,j} M_{ji} x_{1,i} x_{2,j} = \sum_j x_{2,j} \left(\sum_i M_{ij} x_{1,i} \right), \end{aligned}$$

wobei beim Übergang von der ersten zur zweiten Zeile die Symmetrieeigenschaft $M_{ij} = M_{ji}$ benutzt worden ist.

- *Die Eigenwerte einer symmetrischen Matrix sind reell.* Das charakteristische Polynom $\det(\hat{M} - \lambda\hat{E})$ ist für eine $(n \times n)$-Matrix i.A. eine algebraische Gleichung n-ter Ordnung, und kann n komplexe Lösungen λ_i haben. Sei λ einer der Eigenwerte und $\mathbf{x}$ ein dazugehöriger Eigenvektor:

$$\hat{M}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}. \tag{2}$$

Betrachten wir nun die komplex-konjugierte Gleichung. Da die Matrix $\hat{M}$ reell ist, gilt $(\hat{M}\mathbf{x})^* = \hat{M}\mathbf{x}^*$ (um das zu sehen, schreibt man $\mathbf{x} = \mathbf{y} + i\mathbf{z}$ mit reellen Vektoren $\mathbf{y}$ und $\mathbf{z}$ (d.h. die Vektoren mit den Komponenten, die die reellen und imaginären Teile der Komponenten von $\mathbf{x}$ darstellen), und bemerkt, dass $\hat{M}\mathbf{x} = \hat{M}\mathbf{y} + i\hat{M}\mathbf{z}$ gilt). Nun gilt

$$\hat{M}\mathbf{x}^* = \lambda^*\mathbf{x}^*. \tag{3}$$

Multiplizieren wir Gl. (2) von links mit dem Zeilenvektor $\mathbf{x}^{*T}$ und Gl.(3) ebenfalls von links mit $\mathbf{x}^T$, so bekommen wir:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{*T}\hat{M}\mathbf{x} &= \lambda\mathbf{x}^{*T}\mathbf{x} \\ \mathbf{x}^T\hat{M}\mathbf{x}^* &= \lambda^*\mathbf{x}^T\mathbf{x}^*. \end{aligned}$$

$\mathbf{x}^{*T}\mathbf{x} = \mathbf{x}^T\mathbf{x}^*$ ist nichts anderes als das Skalarprodukt $\mathbf{x}^* \cdot \mathbf{x}$ in Matrixschreibweise. Dieses ist stets positiv (komponentenweise ausmultiplizieren, bemerken, dass $\mathbf{x} = 0$ *kein* Eigenvektor ist!). Ziehen wir die zweite Gleichung von der ersten ab, so erhalten wir

$$\mathbf{x}^{*T}\hat{M}\mathbf{x} - \mathbf{x}^T\hat{M}\mathbf{x}^* = (\lambda - \lambda^*)\mathbf{x}^{*T}\mathbf{x}.$$

Die linke Seite dieser Gleichung verschwindet laut Gl. (1). Das heißt $\lambda = \lambda^*$: der Eigenwert ist reell! Da in diesem Fall $\hat{M}(\mathbf{y} + i\mathbf{z}) = \hat{M}\mathbf{y} + i\hat{M}\mathbf{z} = \lambda\mathbf{y} + i\lambda\mathbf{z}$ ist, genügen der reelle und der imaginäre Teil von $\mathbf{x}$ *getrennt* der Eigenwertgleichung. Das heißt, dass der entsprechende Eigenvektor stets reell gewählt werden kann.

- *Die Eigenvektoren einer symmetrischen Matrix zu verschiedenen Eigenwerten sind stets orthogonal zueinander.* Seien λ_1 und λ_2 zwei verschiedene Eigenwerte und $\mathbf{x}_1$ und $\mathbf{x}_2$ die dazugehörigen Eigenvektoren. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \hat{M}\mathbf{x}_1 &= \lambda_1\mathbf{x}_1 \\ \hat{M}\mathbf{x}_2 &= \lambda_2\mathbf{x}_2. \end{aligned}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung von links mit $\mathbf{x}_2$ und die zweite Gleichung mit $\mathbf{x}_1$ und ziehen wir die zweite so erhaltene Gleichung von der ersten ab, so erhalten wir

$$\mathbf{x}_2^T\hat{M}\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_1^T\hat{M}\mathbf{x}_2 = (\lambda_1 - \lambda_2)\mathbf{x}_1^T\mathbf{x}_2.$$

Dabei wurde die Symmetrie des Skalarproduktes, also $\mathbf{x}_2^T\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_1^T\mathbf{x}_2$, ausgenutzt. Die linke Seite der obigen Gleichung verschwindet laut Gl.(1). Da $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ist, bedeutet das, dass $\mathbf{x}_1^T\mathbf{x}_2 = 0$, also dass die Vektoren $\mathbf{x}_1$ und $\mathbf{x}_2$ orthogonal zueinander sind.

- *Besitzt die Matrix $\hat{M}$ zwei oder mehrere (m) gleiche Eigenwerte $\lambda_i = \lambda$, $i = 1, ..., m$, so gibt es genau m* unterschiedliche *dazugehörige Eigenvektoren, aus deren Linearkombinationen man stets m orthonormierte Eigenvektoren bilden kann.* Diese Aussage gebe ich ohne Beweis: Den bekommen Sie im Kurs über die Lineare Algebra. Die Orthogonaliserungsprozedur wurde in der Vorlesung angesprochen.

3 Mathematischer Einschub II: Orthogonale Matrizen

3.1 Vorbetrachtungen

Betrachten wir zwei rechtwinklige Koordinatensysteme mit gleichem Ursprung und in unterschiedliche Richtungen zeigenden Achsen. Die Komponenten $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ und $\mathbf{x}' = (x_1', x_2', x_3')$ des gleichen Punktes (gleichen Vektors $\vec{x}$) haben in beiden Systemen unterschiedliche Werte. Zwischen Vektoren und ihren Komponenten soll scharf unterschieden werden, besonders dann, wenn gleichzeitig mehrere Koordinatensysteme im Spiel sind! Die Transformation der Koordinaten aus einem („Alten“) System (X, Y, Z) in das andere („Neue“) System (X', Y', Z') ist durch die Matrix $\hat{O}$ gegeben: $\mathbf{x}' = \hat{O}\mathbf{x}$, oder komponentenweise

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Die Matrix $\hat{O}$ ist für alle zu transformierenden Vektoren gleich. Beispielsweise hat der alte $\mathbf{e}_x = \mathbf{e}_1$ Vektor im neuen System die Koordinaten

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} \\ d_{21} \\ d_{31} \end{pmatrix}.$$

Das Gleiche tut man für $\mathbf{e}_2$ und $\mathbf{e}_3$. Man sieht, dass die Elemente der Spalte j der Matrix $\hat{O}$ die Koordinaten des alten Richtungsvektors $\mathbf{e}_j$ in einem neuen Koordinatensystem sind. Diese Spalten, als Vektoren zusammengefasst, sind zueinander orthogonal (weil die drei $\mathbf{e}_i$ zueinander orthogonal waren und es auch wieder sein sollen). Ihre Normen (Längen) sind jeweils 1. Insgesamt unterliegen deswegen die neun Elemente von $\hat{O}$ damit sechs Nebenbedingungen, die aus $\mathbf{e}_i^2 = 1$ und aus $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 0$ $(i \neq j)$ folgen (d.h. die Spalten dieser Matrix sind *orthonormal*). Das heißt, dass eine orthogonale (3×3)-Matrix 3 „freie“ Elemente hat, die durch 3 Winkel (Euler-Winkel) parametrisiert werden können.

Die Koordinaten des alten $\mathbf{e}_i$ im neuen System sind nichts anderes als die Längen ihrer Projektionen auf die neuen Koordinatenachsen, d.h. die neue i-te Koordinate des alten j-ten Richtungsvektors ist $d_{ij} = \mathbf{e}_i' \cdot \mathbf{e}_j$. Da die Längen der Richtungsvektoren 1 sind, ist das entsprechende Skalarprodukt gleich dem Kosinus des Winkels zwischen diesen Vektoren (Richtungskosinus). Dies bedeutet, dass die Zeilen der Matrix uns die Koordinaten der neuen Richtungsvektoren im Koordinatensystem geben. Die Zeilen von $\hat{O}$ sind auch orthonormal.

Fazit: Die neuen Koordinaten der alten Richtungsvektoren sind durch die Spalten der

Transformationsmatrix gegeben; die alten Koordinaten der neuen Richtungsvektoren sind ihre Zeilen.

3.2 Eigenschaften der orthogonalen Matrizen

Betrachten wir die zur Matrix $\hat{O}$ transponierten Matrix $\hat{O}^T$ mit Elementen

$$\hat{O}^T = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{21} & d_{31} \\ d_{12} & d_{22} & d_{32} \\ d_{13} & d_{23} & d_{33} \end{pmatrix},$$

so sehen wir, dass die Elemente der Matrix $\hat{O}^T\hat{O}$,

$$\left\{\hat{O}^T\hat{O}\right\}_{ij} = \sum_{k=1}^{3} d_{ki}d_{kj}.$$

sind. Unter Benutzung der Interpretation von d_{kj} als die Komponenten des neuen Richtungsvektors $\mathbf{e}'_j$ im alten System, sehen wir, dass

$$\left\{\hat{O}^T\hat{O}\right\}_{ij} = \mathbf{e}'_i\mathbf{e}'_j = \delta_{ij},$$

mit dem Kronecker δ-Symbol:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad i = j \\ 0 & \text{für} \quad i \neq j. \end{cases}$$

Dies bedeutet, dass die Matrix $\hat{O}^T\hat{O}$ eine Einheitsmatrix ist:

$$\hat{O}^T\hat{O} = \hat{E}$$

mit

$$\hat{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Das heißt per Definition, dass $\hat{O}^T = \hat{O}^{-1}$: Die Transponierte einer Orthogonalmatrix ist gleichzeitig ihrer Inversen.

Da die Determinanten von $\hat{O}$ und $\hat{O}^T$ gleich sind, und da $\det(\hat{A}\hat{B}) = \det\hat{A}\,\det\hat{B}$, sehen wir, dass $(\det\hat{O})^2 = 1$, und $\det\hat{O} = \pm 1$. Die reine Rotation entspricht $\det\hat{O} = 1$ und die Rotation mit Spiegelung $\det\hat{O} = -1$.

3.3 Drehung um eine Achse

Fallen die Z-Achsen der beiden Systeme zusammen, so haben wir es mit einer Drehung um die Z-Achse zu tun. In diesem Fall bleibt die Z-Koordinate des Vektors unverändert, und die (XY) und $(X'Y')$-Ebenen fallen zusammen. Das heißt, dass $\mathbf{e}'_3\mathbf{e}_3 = 1$ und $\mathbf{e}'_3\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}'_3\mathbf{e}_2 = 0$. Ist das neue System gegenüber dem alten um einen Winkel ϕ um die Z-Achse rotiert, so ist der Winkel zwischen neuer und alter X-Achse, und der Winkel zwischen neuer und alter Y-Achse gleich ϕ, d.h. $\mathbf{e}'_1\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}'_1\mathbf{e}_1 = \cos\phi$, der Winkel zwischen der neuen X-Achse und der alten Y-Achse ist $\pi/2 - \phi$, d.h. $\mathbf{e}'_1\mathbf{e}_2 = \sin\phi$, und der Winkel zwischen der neuen Y-Achse und der alten X-Achse ist $\pi/2 + \phi$ so dass $\mathbf{e}'_2\mathbf{e}_1 = -\sin\phi$. Unter Benutzung des Zusammenhangs zwischen dem Richtungskosinus und der Elemente der Matrix $\hat{O}$ bekommen wir

$$\hat{O}_Z(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Eine Matrix, die Invers zu $\hat{O}_Z(\phi)$ (d.h. die den Übergang aus dem neuen zurück in das alte System erlaubt) ist demnach

$$\hat{O}_Z(\phi)^{-1} = \hat{O}_Z^T\phi = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und entspricht der Drehung in die umgekehrte Richtung um den gleichen Winkel.

Zwei aufeinanderfolgende Drehungen um die Z-Achse um die Winkel ϕ und ψ entsprechen der zweifachen Anwendung der Transformation

$$\hat{O}_Z(\psi)\hat{O}_Z(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\phi - \sin\psi\sin\phi & \sin\psi\cos\phi + \cos\psi\sin\phi & 0 \\ -\cos\psi\sin\phi - \sin\psi\cos\phi & \cos\psi\cos\phi - \sin\psi\sin\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos(\psi+\phi) & \sin(\psi+\phi) & 0 \\ -\sin(\psi+\phi) & \cos(\psi+\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \hat{O}_Z(\psi+\phi).$$

4 Infinitesimale Drehung und Rotation

Ist der Winkel $d\phi$ der Drehung sehr klein, so bekommen wir

$$\hat{O}_Z(d\phi) = \begin{pmatrix} 1 & d\phi & 0 \\ -d\phi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \hat{E} + \hat{R}_Z(d\phi)$$

mit

$$\hat{R}_Z(d\phi) = \begin{pmatrix} 0 & d\phi & 0 \\ -d\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir nehmen nun an, dass unser neues System um die gemeinsame Z-Achse ständig rotiert, und die Winkelgeschwindigkeit dieser Rotation ω ist, so dass $\phi = \omega t$. Wäre das alte System das Koordinatensystem eines inertialen Bezugssystems, so entspricht das neue Koordinatensystem einem nichtinertialen Bezugssystem.

Die zeitliche Änderung der Koordinaten des konstanten Vektors $\mathbf{x}$ im neuen System

$$\begin{aligned}
d\mathbf{x}' &= \mathbf{x}'(t+dt) - \mathbf{x}'(t) \\
&= \hat{O}_Z(\omega t + \omega dt)\mathbf{x} - \hat{O}_Z(\omega t)\mathbf{x} \\
&= \hat{O}_Z(\omega dt)\hat{O}_Z(\omega t)\mathbf{x} - \hat{O}_Z(\omega t)\mathbf{x} \\
&= (\hat{E} + \hat{R}(\omega dt))\hat{O}_Z(\omega t)\mathbf{x} - \hat{O}_Z(\omega t)\mathbf{x} \\
&= \hat{R}(\omega dt)\hat{O}_Z(\omega t)\mathbf{x} = \hat{R}(\omega dt)\mathbf{x}'.
\end{aligned}$$

Da wir $\hat{R}(\omega dt)$ wegen der Linearität der Elemente auch als $dt\hat{R}(\omega)$ darstellen können, bekommen wir

$$d\mathbf{x}' = dt\hat{R}(\omega)\mathbf{x}'$$

und

$$\dot{\mathbf{x}}' = \frac{d}{dt}\mathbf{x}' = \hat{R}(\omega)\mathbf{x}'.$$

Schreiben wir diesen Ausdruck komponentenweise aus, so sehen wir dass

$$\begin{pmatrix} \dot{x}'_1 \\ \dot{x}'_2 \\ \dot{x}'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega x'_2 \\ -\omega x'_1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}'$$

mit $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega)$. Da der Vektor $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}' = (0, 0, \omega)$ in beiden Systemen gleich ist, müssen wir uns überlegen, ob wir später an diese Stelle $\boldsymbol{\omega}$ oder $\boldsymbol{\omega}'$ schreiben sollen.

Betrachten wir nun die allgemeine Rotation um eine beliebige Achse, so können wir zuerst diese mit einer Transformation $\hat{O}$ zur Z-Achse machen und dann mit $\hat{O}^{-1}$ zurücktransformieren.

Da ein Vektorprodukt tatsächlich ein Vektor ist, ist die richtige Interpretation also

$$\dot{\mathbf{x}}' = -\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{x}',$$

wobei $\mathbf{x}$ ein konstanter Vektor ist.

Bemerkung: Die Tatsache, dass ein Vektorprodukt ein Vektor ist, bedeutet $\hat{O}[\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}] = \hat{O}\boldsymbol{\omega} \times \hat{O}\mathbf{x}$. Das heißt: Die Komponenten des Vektors $\boldsymbol{\omega}$ sollen immer im *gleichen Koordinatensystem* genommen werden, wie die des Vektors $\mathbf{x}$. Genau in diesem Sinne schreiben wir

$$\dot{\mathbf{x}}' = -\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{x}'.$$

Dies bedeutet nicht, dass das Koordinatensystem gegenüber sich selbst rotieren kann!

Ändert sich der Vektor $\mathbf{x}$ im Laufe der Zeit, so gehen wir folgenderweise vor:

$$\begin{aligned}
d\mathbf{x}' &= \mathbf{x}'(t+dt) - \mathbf{x}'(t) \\
&= \hat{O}_Z(\omega t + \omega dt)\mathbf{x}(t+dt) - \hat{O}_Z(\omega t)\mathbf{x} \\
&= (\hat{E} + dt\hat{R}(\omega))\hat{O}_Z(\omega t)(\mathbf{x} + \dot{\mathbf{x}}dt) - \hat{O}_Z(\omega t)\mathbf{x}
\end{aligned}$$

Nun behalten wir nur die Glieder 1. Ordnung in dt:

$$d\mathbf{x}' = \hat{R}(\omega)\hat{O}_Z(\omega t)\mathbf{x}dt + \hat{O}_Z(\omega t)\dot{\mathbf{x}}dt$$

und bekommen

$$\dot{\mathbf{x}}' = -\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{x}' + \hat{O}_Z(\omega t)\dot{\mathbf{x}} = -\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{x}' + \mathbf{v}'$$

wobei $\mathbf{v}'$ den Komponenten von $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}}$ im rotierenden System (d.h. in ihrem momentanen Koordinatensystem) entspricht. Hier kann man statt $\mathbf{v}'$ ruhig auch $\vec{v}$ schreiben, um zu unterstreichen, dass dies eigentlich ein geometrischer Vektor, nämlich der der Änderungsgeschwindigkeit von $\vec{x}$, ist. Wir können auch schreiben:

$$\vec{v} = \dot{\mathbf{x}}' + \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{x}', \tag{4}$$

oder

$$\vec{v} = \dot{\mathbf{x}}' + \boldsymbol{\omega}' \times \vec{x},$$

um zu unterstreichen, dass $\vec{v}$ und $\vec{x}$ geometrische Objekte sind. $\dot{\mathbf{x}}'$ ist dagegen nur als eine Spalte (oder Zeile) der Ableitungen der Komponenten im rotierenden System zu interpretieren. Oft benutzt man die Notation

$$\frac{d}{dt}\vec{x} = \frac{d'}{dt}\vec{x} + \vec{\omega} \times \vec{x} \tag{5}$$

um zu unterstreichen, dass $\vec{\omega}$ auch ein geometricher Vektor ist, und dass die Ableitung d'/dt von anderer Natur als die "normale" zeitliche Ableitung ist: Das sind die als Vektor zusammengefassten zeitlichen Ableitungen der Komponenten des Vektors die im rotierenden System gemessen werden (*nicht* die zeitliche Änderung des Vektors als geometrisches, unabhängig vom Koordinatensystem existierendes Objekt!).

Fazit: Die zeitliche Änderung eines Vektors im "alten", als ruhend angenommenen Koordinatensystem kann anhand der zeitlichen Ableitungen seiner Komponenten im sich rotierenden System mit der Hilfe von Gl. (5) ausgerechnet werden.

Bemerkung: Für die zeitliche Änderung von $\boldsymbol{\omega}$ erhalten wir

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{\omega} = \frac{d'}{dt}\boldsymbol{\omega}, \tag{6}$$

da das Vektorprodukt von $\vec{\omega}$ mit sich selbst verschwindet! Bei $\vec{\omega}$ ist es egal, wie wir $\dot{\boldsymbol{\omega}}'$ interpretieren: zuerst Rotation, dann Ableitung, oder umgekehrt!

5 Parametrisierung der Rotationen: Euler-Winkel

Wie schon erwähnt, hängt eine allgemeine Rotationsmatrix (orthogonale Matrix) im dreidimensionalen Raum nur von drei unabhängigen Parametern ab. Diese können als drei *Euler-Winkel* gewählt werden. Dafür gibt es mehrere Möglichkeiten. Ich folge der sog. ZYZ-Konvention.

Bemerkung: Die von mir benutzte Notation für die Euler-Winkel ist die, die im Buch von G. B. Arfken und H. J. Weber „*Mathematical Methods for Physicists*" (Harcourt/Acad. Press 2001) benutzt wird (es gibt auch frühere Ausgaben, ab 1966). Diese ist die Notation, die oft in der Gruppentheorie und in der Quantenmechanik benutzt wird. Es gibt auch mehrere andere Notationen. Die Notation unterscheidet sich sowohl von der von Nolting, als auch von der von Landau und Lifschitz.

Seien die beiden—das neue und das alte (K bzw. K′)—Koordinatensysteme festgelegt, so sind diese Winkel wie folgt bestimmt: Fallen die Ursprungspunkte der Systeme zusammen, so schneiden sich die (X, Y) und (X', Y')-Ebenen entlang einer durch diesen Ursprung gezogenen Geraden, der sog. *Knotenlinie*.

Die Rotation erfolgt in drei Schritten um verschiedenen Achsen.

Zuerst rotieren wir das Koordinatensystem um seine Z-Achse (d.h. um die durch $\mathbf{e}_3$ vorgegebene Richtung) um Winkel α bis die Y-Achse (Y') des neuen Koordinatensystems K′ mit der Knotenlinie zusammenfällt. Diese Rotation wird durch die orthogonale Matrix

$$\hat{O}_1 = \hat{O}_Z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

beschrieben.

Jetzt kippen wir das System so, dass die Z-Achse ihre endgültige Position Z' annimmt. Dieses Kippen wird durch Rotation um den Winkel β um die neue Y'-Achse realisiert. Nach dieser erfolgten Rotation haben wir ein Koordinatensystem K_2, dessen Z-Achse und dessen (X, Y)-Ebene mit der von K′ zusammenfällt. Aber die X und Y-Achsen selber haben noch nicht ihre endgültige Positionen erreicht. Der Winkel β ist demnach der Winkel zwischen der alten und der neuen Z-Achse.

Die Rotation um Y-Achse ist durch die Matrix $\hat{O}_Y$ gegeben:

$$\hat{O}_Y(\beta) = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix},$$

so dass die gesamte Rotation (der Übergang von K zu K_2) durch die Matrix

$$\hat{O}_2 = \hat{O}_Y(\beta)\hat{O}_Z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\beta\cos\alpha & \cos\beta\sin\alpha & -\sin\beta \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ \sin\beta\cos\alpha & \sin\beta\sin\alpha & \cos\beta \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Da die Zeilen dieser Matrix die Koordinaten der neuen Richtungsvektoren in K angeben, und da die letzte Rotation um die Richtung der Y-Achse von K_2 gemacht wird, ist diese um $\mathbf{e}_\beta = (-\sin\alpha, \cos\alpha, 0)$ durchgeführt.

Nun machen wir die letzte Rotation, die das System K_2 in K′ überführt. Diese erfolgt um den Winkel γ um die gemeinsame Z'-Achse der Systeme K_2 und K′. Die gesamte Rotationsmatrix ist nun

$$\hat{O}_3 = \hat{O}_Z(\gamma)\hat{O}_Y(\beta)\hat{O}_Z(\alpha) =$$
$$\begin{pmatrix} \cos\gamma\cos\beta\cos\alpha - \sin\gamma\sin\alpha & \cos\gamma\cos\beta\sin\alpha - \sin\gamma\cos\alpha & -\cos\gamma\sin\beta \\ -\sin\gamma\cos\beta\cos\alpha - \cos\gamma\sin\alpha & -\sin\gamma\cos\beta\sin\alpha + \cos\gamma\cos\alpha & \sin\gamma\sin\beta \\ \sin\beta\cos\alpha & \sin\beta\sin\alpha & \cos\beta \end{pmatrix}.$$

Diese Rotation erfolgt um einen Richtungsvektor, der in K die folgende Koordinaten hat: $\mathbf{e}_\gamma = (\sin\beta\cos\alpha, \sin\beta\sin\alpha, \cos\beta)$.

Ändern sich α, β und γ in Laufe der Zeit, so erfolgt die Rotation des Systems K$'$ gegenüber K mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\alpha}\mathbf{e}_3 + \dot{\beta}\mathbf{e}_\beta + \dot{\gamma}\mathbf{e}_\gamma$$

d.h.

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \dot{\gamma}\sin\beta\cos\alpha - \dot{\beta}\sin\alpha \\ \dot{\gamma}\sin\beta\sin\alpha + \dot{\beta}\cos\alpha \\ \dot{\gamma}\cos\beta + \dot{\alpha} \end{pmatrix}.$$

Um den Winkelgeschwindigkeitsvektor im rotierenden System auszudrücken, kann man entweder den Vektor $\boldsymbol{\omega}$ mit Hilfe von $\hat{O}_3$ transformieren, oder—einfacher—folgendes bemerken: Der Übergang von K$_2$ zu K$'$ erfolgt durch Rotation um die gemeinsamen Z-Achse, d.h. $\mathbf{e}_\gamma$ in K$'$ ist durch die letzte Spalte von $\hat{O}_Z$ gegeben, $\mathbf{e}'_\gamma = (0,0,1)$. Der Übergang von K$_1$ zu K$'$ erfolgt durch zwei Rotationen, um Y und dann um Z-Achse; die entsprechende Transformationsmatrix ist

$$\hat{O}_Z(\gamma)\hat{O}_Y(\beta) = \begin{pmatrix} \cos\gamma\cos\beta & \sin\gamma & -\cos\gamma\sin\beta \\ -\sin\gamma\cos\beta & \cos\gamma & \sin\gamma\sin\beta \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix},$$

und die Richtung von $\mathbf{e}'_\beta$ (alte Y-Achse) ist durch die 2. Spalte dieser Matrix gegeben: $\mathbf{e}'_\beta = (\sin\gamma, \cos\gamma, 0)$. Die Richtung der $\mathbf{e}'_\alpha$ (der alten Z-Achse) ist durch die 3. Spalte der Matrix $\hat{O}_3$ gegeben. Insgesamt bekommen wir

$$\boldsymbol{\omega}' = \dot{\alpha}\mathbf{e}'_3 + \dot{\beta}\mathbf{e}'_\beta + \dot{\gamma}\mathbf{e}'_\gamma = \begin{pmatrix} -\dot{\alpha}\sin\beta\cos\gamma + \dot{\beta}\sin\gamma \\ \dot{\alpha}\sin\beta\sin\gamma + \dot{\beta}\cos\gamma \\ \dot{\alpha}\cos\beta + \dot{\gamma} \end{pmatrix}. \tag{7}$$

6 Rotation eines starren Körpers

Rotiert ein starrer Körper mit der Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{e}_\omega$ um eine Achse deren Richtung durch den Richtungsvektor $\mathbf{e}_\omega$ gegeben wird, so ist sein Drehimpuls gegenüber einem ruhenden Koordinatensystem

$$\mathbf{L} = \hat{I}\boldsymbol{\omega}\,, \tag{8}$$

wobei $\hat{I}$ die Matrix des Trägheitstensors des Körpers ist. Für einen Tensor, der als geometrisches Objekt unabhängig von unserer Darstellung ist, ist die Matrix $\hat{I}$ genau das Gleiche, wie eine Zeile oder eine Spalte für einen Vektor, sie enthält seine Komponenten in einem vorgegebenen Koordinatensystem. Normalerweise, bei der Rotation um eine fixierte Achse (Richtung $\mathbf{e}_\omega$) dient $\hat{I}$ als "Konserve" zur Bestimmung der Trägheitsmomente I gegenüber dieser Achse, was aus der Form für die kinetische Energie der Rotationsbewegung erfolgen kann.

Bemerkung: Ein starrer Körper kann gleichzeitig nur um eine Achse rotieren; sich etwas anderes vorzustellen verursacht nur Schwindel!

Per Definition wird $\hat{I}$ in einem *körperfesten* System ausgerechnet und hängt nur von der Massenverteilung im Körper ab (siehe Vorlesung!). Die Matrix $\hat{I}$, die für ein Koordinatensystem mit Ursprung im Massenschwerpunkt des Körpers ausgerechnet wird, ist symmetrisch.

Eine symmetrische Matrix kann immer durch eine Orthogonaltransformation diagonalisiert werden. Das heißt: Man kann immer ein *körperfestes* System finden, so dass

$$\hat{I} = \hat{O}\hat{J}\hat{O}^T = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} .$$

So ein System kann man anhand der Eigenvektoren von $\hat{I}$ bilden; die Werte I_i sind die Hauptträgheitsmomente; die entsprechenden Richtungsvektoren $\mathbf{e}_i$ definieren die *Hauptachsen*. Nur wenn ein Körper um eine seiner Hauptachsen rotiert, fallen die Richtungen von $\mathbf{L}$ und $\boldsymbol{\omega}$ zusammen.

6.1 Kräftefreier Kreisel

Für die Diskussion der Rotation des Körpers brauchen wir zwei Bezugssysteme: das Laborsystem L eines ruhenden Beobachters und das körperfeste, rotierende System K. Für einen kräftefreien Kreisel können wir die Ursprünge beider Systeme im Schwerpunkt des Körpers annehmen, der ruht (ruht er nicht, machen wir zuerst eine Galilei-Transformation!). Da die Rotationsachse i.A. nicht mit einer der Hauptachsen des Körpers zusammenfällt, ist die allgemeine Bewegung komplizierter: Da der Körper rotiert, ändern sich die Komponenten des Trägkeitstensors von einem Zeitpunkt zum anderen. Der Drehimpuls eines kräftefreien Kreisel $\mathbf{L}$ bleibt konstant, die Richtung von $\boldsymbol{\omega}$ und die Komponenten von $\hat{I}$ ändern sich im Laufe der Zeit. Die allgemeine Gleichung

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^{3} I_{ij}\omega_j\right) = 0 \tag{9}$$

ist schwer zu durchschauen. Betrachten wir die Gleichung Gl. (8) oder Gl. (9) zu irgendeinem Zeitpunkt, so finden wir zu jedem Zeitpunkt ein Koordinatensystem in dem diese besonders einfach aussehen. Die Richtungen der entsprechenden Achsen fallen mit der momentanen Richtungen der Hauptträgheitsachsen des Körpers zusammen. In diesem System gilt

$$L_i = I_i\omega_i \,, \tag{10}$$

allerdings müssen die Achsen dieses Systems zu jedem Augenblick aufs neue gewählt werden. Die Übergang aus dem Laborsystem in dieses (körperfeste) System erfolgt durch eine orthogonale Transformation mit der Matrix $\hat{O}(t)$, die die Rotationen der Achsen des raumfesten Systems beschreibt, bis sie mit denen des körperfesten Systems zusammenfallen.

Die Komponenten der $\boldsymbol{\omega}$ in diesem System sind $\omega_i(t)$; sie sind i.A. zeitabhängig, da die Achsen dieses (körperfesten) Systems zu jedem Zeitpunkt neu gewählt werden. Da bei dem Übergang zum Koordinatensystem von K ein Vektor laut $\boldsymbol{\omega}' = \hat{O}\boldsymbol{\omega}$ und ein Tensor laut $\hat{I}' = \hat{O}\hat{I}\hat{O}^T$ transformiert werden, transformiert sich der Drehimpuls $\mathbf{L}$, wie es sich gehört, wie ein Vektor: $\mathbf{L}' = \hat{I}'\boldsymbol{\omega}' = \hat{O}\hat{I}\hat{O}^T\hat{O}\boldsymbol{\omega} = \hat{O}\hat{I}\boldsymbol{\omega} = \hat{O}\mathbf{L}$.

Bemerkung: $\boldsymbol{\omega}'$ *ist nicht* die Rotationsgeschwindigkeit des Körpers im körperfesten System K (da der Körper in diesen System ruht!), sondern der Vektor der Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ des Körpers (und damit des körperfesten Systems) im *Koordinatensystem* K zum Zeitpunkt t.

Gehen wir nun in das Koordinatensystem System K, dessen Achsen mit den Hauptachsen des Trägheitstensors zusammenfallen. Dieses System rotiert mit momentaner Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ gegenüber L.

Im rotierenden Koordinatensystem ist

$$\frac{d'}{dt}\mathbf{L}' + \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{L}' = 0. \tag{11}$$

wobei $\boldsymbol{\omega}'$ die Winkelgeschwindigkeit des Körpers (d.h. des körperfesten Systems in Laborsystem, ausgedrückt in Koordinaten des körperfesten Systems) ist, $\mathbf{L}'$ sind die Komponenten von $\mathbf{L}$ im rotierenden System und $\frac{d'}{dt}\mathbf{L}'$ ihre zeitlichen Ableitungen.

In unserem Koordinatensystem $\boldsymbol{\omega}' = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, $\mathbf{L}' = (I_1\omega_1, I_2\omega_2, I_3\omega_3)$ und $\frac{d'}{dt}\mathbf{L}' = (I_1\dot{\omega}_1, I_2\dot{\omega}_2, I_3\dot{\omega}_3)$ (da die Elemente von $\hat{I}$ in diesem System konstant bleiben!).

Schreiben wir die Gl.(11) komponentenweise aus, so erhalten wir die Euler-Gleichungen

$$\begin{aligned}
I_1\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\omega_3\omega_2 &= 0 \\
I_2\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\omega_1\omega_3 &= 0 \\
I_3\dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\omega_2\omega_1 &= 0.
\end{aligned}$$

Diese können näherungsweise oder, für den Fall eines symmetrischen Kreisels, exakt gelöst werden.

6.2 Symmetrischer Kreisel

Für einen symmetrischen Kreisel mit $I_1 = I_2 = I$ und $I_3 = I_{||}$ vereinfachen sich die Gleichungen. Man bekommt $\dot{\omega}_3 = 0$ und dann die Lösungen für die zwei weiteren Gleichungen

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= A\sin(\Omega t + \phi) \\
\omega_2 &= A\cos(\Omega t + \phi)
\end{aligned}$$

mit $\Omega = \omega_3(I - I_{||})/I$ und $A = \omega_1^2 + \omega_2^2$ und ϕ - die Integrationskonstanten. (Lösungsweg: Da ω_3 konstant bleibt, sind die zwei verbliebenen Gleichungen linear, und können durch exponentielle Substitution gelöst werden.)

Nun müssen wir in das Laborsystem L zurückgehen, um die Bewegung des Kreisels aus der Sicht des unbeweglichen Beobachters zu beschreiben. Die Achsen von L sind so gewählt, dass die Z-Achse parallel zu $\mathbf{L}$ läuft: $\mathbf{L} = L\mathbf{e}_3^L$, wobei der Richtungsvektor $L\mathbf{e}_3^L$ im körperfesten System die Komponenten hat, die durch die letzte Spalte der Matrix $\hat{O}_3$ gegeben sind:

$$\mathbf{L}' = L\begin{pmatrix} -\cos\gamma\sin\beta \\ \sin\gamma\sin\beta \\ \cos\beta \end{pmatrix}$$

Im Laborsystem sehen wir die Rotation des Kreisels als eine ständige Änderung der Eulerwinkel, die die Position von K in L beschreibt. Wir werden nun diese Änderungen auf die Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}'$ zurückführen. Das kann man am besten durch die Betrachtung der Komponenten im körperfesten System machen.

Unter Benutzung von Gl. (7) und Gl. (10) erhalten wir:

$$\begin{aligned}
-I\dot{\alpha}\sin\beta\cos\gamma + I\dot{\beta}\sin\gamma &= -L\cos\gamma\sin\beta && (12)\\
I\dot{\alpha}\sin\beta\sin\gamma + I\dot{\beta}\cos\gamma &= L\sin\gamma\sin\beta && (13)\\
I_{||}\dot{\alpha}\cos\beta + I_{||}\dot{\gamma} &= L\cos\beta
\end{aligned}$$

Multiplizieren wir Gl. (12) mit $-\cos\gamma$ und die Gl. (13) mit $\sin\gamma$ und addieren wir die beiden, so erhalten wir

$$I\dot{\alpha}\sin\beta = L\sin\beta,$$

d.h. $\dot{\alpha} = L/J$. Multiplizieren wir Gl. (12) mit $\sin\gamma$ und Gl. (13) mit $\cos\gamma$ und addieren wir die beiden, so erhalten wir

$$I\dot{\beta} = 0$$

d.h. $\beta = \beta_0 = \text{const}$. Unter Benutzung der obigen Gleichungen und Gl. (7) erhalten wir:

$$\begin{aligned}
A\sin(\Omega t + \phi) &= -\frac{L}{I}\sin\beta_0\cos\gamma\\
A\cos(\Omega t + \phi) &= \frac{L}{I}\sin\beta_0\sin\gamma\\
\omega_3 &= \frac{L}{I}\cos\beta_0 + \dot{\gamma},
\end{aligned}$$

woraus die Gleichung für γ und die Integrationskonstanten folgen: Dividieren wir die obere Gleichung durch die untere, so erhalten wir

$$\tan(\Omega t + \phi) = -\cot\gamma,$$

d.h.

$$\gamma = \Omega t + \phi + \frac{\pi}{2} = \frac{I - I_{||}}{I}\omega_3 t + \text{const.}$$

Die Interpretation der Bewegung ist dann wie folgt:

- Die Figurenachse (die Hauptachse, die dem Wert $I_{||}$ entspricht, die Achse der höchsten Symmetrie) ist gegenüber der Z-Achse (der Richtung des Drehimpulses) um einen konstanten Winkel β_0 geneigt, und rotiert um diese Achse mit dem konstanter Winkelgeschwindigkeit $\dot{\alpha} = L/J$. Diese Bewegung heißt „kräftefreie Präzession“, „reguläre Präzession“, oder „Nutation“ des Kreisels (die Bewegung im Falle der Einwirkung äußerer Kräfte ist komplizierter; da unterscheidet man zwischen der Nutation und der von der äußeren Kraft verursachten Präzession des Kreisels.

- Der Kreisel rotiert um seine Figurenachse mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\dot{\gamma} = \Omega$.

6.3 Stabile und instabile Rotation

Die Situation $I_1 \neq I_2$ ist unvergleichbar komplexer. Wir machen hier nur einige qualitative Aussagen darüber.

Betrachten wir die Bewegung mit einer Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}(t)$ um eine der Hauptachsen: $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_i$. Für einer solche Bewegung bleibt $\boldsymbol{\omega}$ im Laufe der Zeit konstant. Diskutieren wir nun eine gestörte Bewegung, die durch eine kleine Änderung der Anfangsbedingungen (Winkelgeschwindigkeit in einem kleinen Winkel zur Hauptachse) verursacht wird. Die Winkelgeschwindigkeit dieser gestörten Bewegung zur Zeitpunkt t ist $\tilde{\boldsymbol{\omega}}(t) = \boldsymbol{\omega}(t) + \delta\boldsymbol{\omega}(t)$.

- Bleibt $\delta\boldsymbol{\omega}(t)$ stets klein, ist die Rotation um die Hauptachse i stabil.
- Kann $\delta\boldsymbol{\omega}(t)$ groß werden, ist die Bewegung instabil. Die Instabilitäten sind oft die Ursache einer *chaotischen* Bewegung.

Seien die Trägheitsmomente um die Hauptachsen $I_1 > I_2 > I_3$. Wir zeigen nun, dass die Rotation um $\mathbf{e}_1$ und $\mathbf{e}_3$ stabil ist, die Rotation um $\mathbf{e}_2$ kann jedoch instabil sein (und *ist* instabil).

Betrachten wir die zwei erhaltenden Größen, die kinetische Energie

$$T = \frac{1}{2}\left(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2\right)$$

und den Drehimpuls $\mathbf{L}$. Dabei bleibt

$$|\mathbf{L}|^2 = |\mathbf{L}'|^2 = I_1^2\omega_1^2 + I_2^2\omega_2^2 + I_3^2\omega_3^2$$

auch konstant. Nun merken wir, dass auch die drei Kombinationen

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & 2TI_1 - |\mathbf{L}|^2 \\ \text{(b)} & 2TI_2 - |\mathbf{L}|^2 \\ \text{(c)} & 2TI_3 - |\mathbf{L}|^2 \end{array}$$

konstant bleiben. Ist ω_1 die größte Komponente von $\boldsymbol{\omega}(0)$, so betrachten wir die Kombination (a), ist es ω_2, benutzen wir die Kombination (b), ist es ω_3, so benutzen wir (c). Die anfängliche Störung $\delta\boldsymbol{\omega}(0) = (0, \omega_2, \omega_3)$ im erstem, $\delta\boldsymbol{\omega}(0) = (\omega_1, 0, \omega_3)$ im zweitem und $\delta\boldsymbol{\omega}(0) = (\omega_1, \omega_2, 0)$ in drittem Fall.

Drücken wir (a) durch die Komponenten von $\boldsymbol{\omega}$ aus, so erhalten wir

$$2TI_1 - |\mathbf{L}|^2 = I_2(I_1 - I_2)\omega_2^2 + I_3(I_1 - I_3)\omega_3^2 = g(\delta\boldsymbol{\omega}(t)) = const$$

(hier ist es nur wichtig, dass die Funktion in der linken Seite die Funktion von $\delta\boldsymbol{\omega}(t)$ ist). Da diese Funktion konstant bleibt, ist ihr Wert genau $g(\delta\boldsymbol{\omega}(0)) = g_0$. Da $I_1, I_2, I_3 > 0$, $I_1 - I_2 > 0$, $I_1 - I_3 > 0$, sind beide Glieder, $I_2(I_1 - I_2)\omega_2^2$ und $I_3(I_1 - I_3)\omega_3^2$ nicht negativ. Daher gilt:

$$\begin{aligned} g_0 &= I_2(I_1 - I_2)\omega_2^2(0) + I_3(I_1 - I_3)\omega_3^2(0) \\ &\leq [I_2(I_1 - I_2) + I_3(I_1 - I_3)][\omega_2^2(0) + \omega_3^2(0)] = [I_2(I_1 - I_2) + I_3(I_1 - I_3)]|\delta\boldsymbol{\omega}(0)|^2 \end{aligned}$$

und

$$\omega_2^2(t) \le \frac{g_0}{I_2(I_1 - I_2)}, \qquad \omega_3^2(t) \le \frac{g_0}{I_2(I_1 - I_2)}.$$

Daraus folgt eine Ungleichung

$$|\delta\boldsymbol{\omega}(t)|^2 \le \left[\frac{1}{I_2(I_1 - I_2)} + \frac{1}{I_2(I_1 - I_2)}\right][I_2(I_1 - I_2) + I_3(I_1 - I_3)]|\delta\boldsymbol{\omega}(0)|^2.$$

Das heißt, dass es eine positive Konstante $C = \{1/[I_2(I_1 - I_2)] + 1/[I_2(I_1 - I_2)]\}\,[I_2(I_1 - I_2) + I_3(I_1 - I_3)]$ gibt, so dass $|\delta\boldsymbol{\omega}(t)|^2 \le C|\delta\boldsymbol{\omega}(0)|^2$, und $\delta\boldsymbol{\omega}(t)$ zu jeder Zeit begrenzt bleibt. Ist $\delta\boldsymbol{\omega}(0)$ klein, so bleibt $\delta\boldsymbol{\omega}(t)$ klein. Die Bewegung ist stabil.

Die Situation wiederholt sich im Fall (c). Nun ist

$$I_1(I_3 - I_1)\omega_2^2(t) + I_2(I_3 - I_2)\omega_3^2(t) = I_1(I_3 - I_1)\omega_2^2(0) + I_2(I_3 - I_2)\omega_3^2(0).$$

Alle Glieder auf der linken und der rechten Seite der Gleichung sind jetzt nicht-positiv. Man bekommt ebenfalls $|\delta\boldsymbol{\omega}(t)|^2 \le C|\delta\boldsymbol{\omega}(0)|^2$, nun mit

$$C = \{1/[I_2(I_3 - I_2)] + 1/[I_1(I_3 - I_1)]\}\,[I_2(I_3 - I_2) + I_1(I_3 - I_2)] > 0,$$

und $\delta\boldsymbol{\omega}(t)$ bleibt zu jeder Zeit begrenzt.

Für den Fall (b) haben wir

$$\underbrace{I_1(I_2 - I_1)}_{<0}\omega_1^2(t) + \underbrace{I_3(I_2 - I_3)}_{>0}\omega_3^2(t) = I_1(I_2 - I_1)\omega_1^2(0) + I_3(I_2 - I_3)\omega_3^2(0).$$

Die rechte Seite der Gleichung ist klein, aber die zwei Glieder in der linken Seite haben entgegengesetzte Vorzeichen, und ihre Beträge können groß werden: $\delta\boldsymbol{\omega}(t)$ kann anwachsen. Diese Bewegung ist nicht stabil. Die Tatsache, dass $|\delta\boldsymbol{\omega}(t)|$ am Anfang tatsächlich anwächst (man bemerkt, das Gesamtbetrag von ω durch Energieerhaltung begrenzt bleibt), und welche Auswirkungen das auf die Art der Gesamtbewegung hat, erfordert eine separate (und lange) Diskussion!