Ähnlichkeits- und Dimensionsanalyse in mechanischen Problemen

12. Dezember 2012

Einführende Bemerkung: Diese Notizen enthalten nicht das ganze Material der entsprechenden Vorlesungen.

In vielen Fällen ist es möglich, das physikalische Problem zu analysieren, ohne die entsprechenden Gleichungen lösen zu müssen. Dies gilt als hohe Kunst der theoretischen Physik. Die vorliegenden Notizen betrachten einige dabei anwendbare Methoden, die auf dem gleichen Ansatz basieren: Was passiert mit dem Zahlenwert der entsprechenden physikalischen Größe, wenn man die Maßeinheiten oder die Werte der Parameter ändert.

Empfohlende Lektüre:

Bridgman P. W. 1931 *Dimensional Analysis*, Yale Univ. Press, New Haven (es gibt späteren Ausgaben).

Sedov L. I. 1959, *Similarity and Dimensional Analysis in Mechanics*, Acad. Press, N.Y. (es gibt späteren Ausgaben).

Barenblatt G. I. 1996 *Similarity, Self-Similarity, and Intermediate Asymptotics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge.

Barenblatt G. I. 2003 *Scaling*, Cambridge Univ. Press, Cambridge.

1 Ähnlichkeitsanalyse

Im folgenden Abschnitt analysieren wir die uns schon bekannten Fälle der Bewegung unter konstanter Kraft (z.B. freier Fall), der harmonischen Schwingung und des Kepler-Problems. Alle diese Fälle haben gemein, dass sie durch Potenz-Funktionen der entsprechenden Koordinaten dargestellt werden können:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{F} = -mg\mathbf{e}_z && \text{freier Fall,} \\
&\mathbf{F} = -\kappa\mathbf{r} && \text{harmonische Schwingung} \\
&\mathbf{F} = -\gamma\frac{Mm}{\mathbf{r}^2}\mathbf{e}_r && \text{Kepler-Problem.}
\end{aligned}
$$

Alle diese Abhängigkeiten haben die Tatsache gemein, dass

$$\mathbf{F}(\alpha\mathbf{r}) = \alpha^n \mathbf{F}(\mathbf{r})$$

(wobei $\alpha > 0$ eine beliebige positive Zahl ist). Die Werte von n sind:

$$\begin{array}{ll} n = 0 & \text{für den freien Fall,} \\ n = 1 & \text{für die harmonische Schwingung,} \\ n = -2 & \text{für das Kepler-Problem.} \end{array}$$

Die Bewegungsgleichung des Systems ist durch

$$m\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{r} = \mathbf{F}(\mathbf{r}) \tag{1}$$

gegeben. Nehmen wir an, dass uns die Bahnkurve der Bewegung bekannt ist, und analysieren wir die Bewegung auf einer geometrisch ähnlichen Bahnkurve, wobei $\mathbf{r}$ um α skaliert sei. Den skalierten Ortsvektor $\alpha\mathbf{r}$ nennen wir $\mathbf{r}'$. Wir betrachten also die Transformation

$$\mathbf{r} \to \mathbf{r}' = \alpha\mathbf{r}.$$

Statt eine andere Bahnkurve zu betrachten, kann man einfach eine Maßeinheit der Länge um Faktor α^{-1} ändern: Numerisch führt das zu der gleichen Änderung der Bewegungsgleichung, die auf die Transformation $\mathbf{r}' = \alpha\mathbf{r}$ hinausläuft. Die Änderung der Maßeinheiten um einen Faktor nennt man eine *Skalentransformation*.

Bei der Transformation der Länge um den Faktor α ändert sich die Kraft um Faktor α^n, sodass die Bewegungsgleichung (1) eine andere Gestalt annimmt:

$$m\frac{d^2}{dt^2}\alpha\mathbf{r} = \alpha^n\mathbf{F}(\mathbf{r}),$$

oder

$$\alpha^{1-n}m\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{r} = \mathbf{F}(\mathbf{r}).$$

Ändert man gleichzeitig alle Zeiten um den Faktor β, $t \to t' = \beta t$ (oder die Zeiteinheit um den Faktor β^{-1}), so erhält man die Gleichung

$$\frac{\alpha^{1-n}}{\beta^2}\frac{d^2}{dt^2}m\mathbf{r} = \mathbf{F}(\mathbf{r}),$$

die, wenn man

$$\beta = \alpha^{(1-n)/2}$$

wählt, die gleiche Gestalt wie Gl. (1) hat. Gl. (1) ist demnach *invariant* unter der Skalentransformation

$$\begin{array}{l} L \to \alpha L \\ T \to \alpha^{(1-n)/2}T. \end{array}$$

Das bedeutet: Wenn wir geometrisch ähnliche Bewegungen betrachten, so stehen die Zeiten der Bewegung zwischen korrespondierenden Punkten der Trajektorien in folgender Beziehung zueinander:

$$\frac{t'}{t} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{(1-n)/2}.$$

Beispiele:

(i) Für den freien Fall ($n = 0$) erhalten wir

$$\frac{t'}{t} = \left(\frac{h'}{h}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{h'}{h}}.$$

D.h. die Fallzeiten von zwei verschiedenen Höhen entsprechen der Quadratwurzel aus der Höhen, oder

$$t \propto \sqrt{h}.$$

(ii) Für harmonische Schwingungen ($n = 1$) sehen wir, dass

$$\frac{t'}{t} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{0} = 1,$$

d.h. dass die Periode der Schwingung von ihrer Amplitude unabhängig ist, und

(iii) für das Kepler-Problem sehen wir, dass

$$\frac{t'}{t} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{\frac{3}{2}},$$

d.h. dass die Quadrate der Umlaufzeiten sich wie Kuben der Abmessungen der Orbits verhalten. Hier haben wir natürlich weder bewiesen, dass die Orbits Ellipsen sind, noch dass diese Zeiten nicht von den kleinen Halbachsen der Ellipsen abhängen.

Im Prinzip können wir nicht nur Skalen, sondern auch die Werte der Parameter in der Gleichungen ändern. Betrachten wir z.B. den eindimensionalen harmonischen Oszillator:

$$m\frac{d^2}{dt^2}x = -kx.$$

Die gleiche Überlegung wie oben können wir benutzen, wenn wir die Masse ändern. Die gleichzeitige Änderung der Masse um Faktor γ und der Zeit um Faktor $\gamma^{1/2}$ ändert die Gestalt der Gleichung nicht, so dass

$$\frac{t'}{t} = \sqrt{\frac{m'}{m}}. \tag{2}$$

Das gleiche passiert, wenn wir gleichzeitig k um den Faktor γ und t um $\gamma^{-1/2}$ ändern:

$$\frac{t'}{t} = \sqrt{\frac{k}{k'}}. \tag{3}$$

Aus den Gleichungen (2) und (3) und aus der Unabhängigkeit der Periode von der Amplitude der Schwingung erhalten wir

$$T \propto \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

In diesem Fall können wir nur den numerischen Vorfaktor 2π nicht durch die qualitative Überlegung bekommen.

2 Dimensionsanalyse

Eine Variante der Ähnlichkeitsüberlegungen kann auch dann benutzt werden, wenn die Gleichungen entweder zu kompliziert sind, um die Abhängigkeiten von den interessanten Größen unmittelbar aus den Gleichungen zu bekommen, oder wenn die Gleichungen gar nicht vorhanden sind.

2.1 Dimensionen der physikalischen Größen

Man fängt mit einem genügenden Vorrat von Grundgrößen an. In der Mechanik, egal welches der gängigen Einheitensysteme Sie benutzen, gibt es drei Grundgrößen:

- Länge L (gemessen in Meter, Zentimeter, Kilometer, Fuß, Zoll u.s.w)
- Masse M (Kilogramm, Gramm, Pfund, Tonne)
- Zeit T (Sekunde, Minute, Jahr).

Diese Grundgrößen werden als unabhängig angesehen, d.h. es gibt drei unabhängige Messvorschriften: Man misst die Länge mit einem Maß, die Zeit mit der Uhr und die Masse mit der Waage. Alle anderen mechanischen Größen werden aus diesen drei abgeleitet. Zum Beispiel misst man die Geschwindigkeit mit dem Maß und der Uhr, in Meter pro Sekunde oder in Kilometer pro Stunde. Egal, welche Maßstäbe (d.h. genaue Einheiten) für die Grundgrößen eingesetzt werden, ist unser System vom LMT -Typ. Wir nehmen an (d.h. *postulieren*), dass alle Einheitensysteme gleichen Typs äquivalent sind, d.h. die *physikalischen* Gleichungen in allen diesen Systemen die gleiche Gestalt haben. Keines der Systeme der Einheiten vom gleichen Typ ist durch irgendeine Eigenschaft ausgezeichnet (abgesehen von Kraft des Gesetzes, das uns SI vorschreibt).

In der Vorlesung wurden die **Beispiele** für andere Einheitensysteme (z.B. LFT) genannt, und nicht-physikalische Gleichungen diskutiert, die nur in einem Einheitensystem gelten.

Sei Y eine abgeleitete Größe. Ihre *Dimension* kann immer in Form eines Monoms

$$[Y] = \mathrm{L}^l \mathrm{T}^t \mathrm{M}^m \tag{4}$$

dargestellt werden, wobei m, l und t reelle Zahlen sind. Die Bezeichnung [...] für die Dimension einer Größe stammt von J. C. Maxwell. Zum Beispiel ist die Dimension der Geschwindigkeit $[v] = \mathrm{LT}^{-1}$ und die der Beschleunigung $[a] = \mathrm{LT}^{-2}$. Die Bedeutung von diesen monomialen Formen ist wie folgt: Wenn sich z.B. die Einheit der Länge um den Faktor α ändert, so ändert sich der Zahlenwert von Y um den Faktor α^l. Das heißt: Ändert sich gleichzeitig die Längeneinheit um den Faktor α, die Zeiteinheit um den Faktor β und die Masseneinheit um den Faktor γ so ändert sich die Maßeinheit von Y um den Faktor $\phi = \alpha^l \beta^t \gamma^m$. Sind die Potenzen $l = t = m = 0$, so sagt man, dass die Größe Y *dimensionslos* ist. Die Zahlenwerte der dimensionslosen Größen sind in allen Einheitensystemen gleichen Typs gleich.

Bei der Formulierung der physikalischen Gesetze gehen wir davon aus, dass, obwohl die Einheiten der Hauptgrößen willkürlich gewählt sind, die Beziehungen zwischen zwei gleichartigen, in einem physikalischen Experiment gemessenen (oder theoretisch berechneten) Größen in allen Einheitensystemen gleich sind. D.h. wenn die Geschwindigkeit v_1 eines Körpers in m/s zwei mal so groß ist wie die Geschwindigkeit eines anderen Körpers v_2 in m/s, d.h. $v_1 = 2v_2$, dann gilt das gleiche, wenn die entsprechenden Geschwindigkeiten in Fuß pro Minute oder in Kilometer pro Stunde gemessen werden. In anderen Worten heißt das, dass der Quotient Y_1/Y_2 nicht vom Einheitensystem abhängt (d.h. er ist dimensionslos). Das ist die Aussage des von P. W. Bridgman formulierten „Prinzips der absoluten Bedeutung relativer Größen“: Eine Zahl Q, erhalten durch das Einsetzen der numerischen Werte der Parameter in eine Formel, ist nur dann eine physikalische Größe, wenn der Quotient zweier solcher Zahlen bei der Änderung der Grundeinheiten konstant bleibt.

Betrachten wir zuerst ein Beispiel, wobei eine beliebige physikalische Größe Y von mehreren Parametern der Dimension der Länge abhängt (z.B. das Volumen eines Quaders mit unterschiedlichen Abmessungen):

$$Y = f(x_1, ..., x_n) = f(\mathbf{x}),$$

wobei alle Werte von x_i einfachheitshalber als Komponenten eines multidimensionalen Vektors $\mathbf{x}$ zusammengefasst sind. Die Funktion f, die die Form des physikalischen Gesetzes darstellt, ist in allen Einheitenystemen gleich (z.B. $V = f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3$), die Zahlenwerte von x_i und von V bzw. Y sind in unterschiedlichen Einheitssysteme unterschiedlich.

Betrachten wir nun die Resultate von Messungen oder Berechnungen der Volumina zweier Quader Y und Y' (d.h. die Zahlenwerte der Observablen). Der Wert

$$\frac{Y'}{Y} = \frac{f(\mathbf{x}')}{f(\mathbf{x})}$$

soll dimensionslos, und daher skalenunabhängig sein:

$$\frac{f(\mathbf{x}')}{f(\mathbf{x})} = \frac{f(\alpha\mathbf{x}')}{f(\alpha\mathbf{x})},$$

oder

$$\frac{f(\alpha\mathbf{x}')}{f(\mathbf{x}')} = \frac{f(\alpha\mathbf{x})}{f(\mathbf{x})}.$$

Bezeichnen wir mit $Y(\alpha)$ den Zahlenwert von Y in einem Einheitensystem mit den um einen Faktor α gegenüber dem Ausgangssystem veränderten Einheiten, so ist die letzte Gleichung wie folgt umzuschreiben $Y(\alpha)/Y(1) = Y'(\alpha)/Y'(1)$. Bezeichnen wir nun

$$\frac{Y(\alpha)}{Y(1)} = \frac{Y'(\alpha)}{Y'(1)} = \phi(\alpha).$$

Betrachten wir drei unterschiedliche Einheitensysteme, unser Ausgangssystem und zwei andere mit Skalenfaktoren α_1 und α_2:

$$\begin{array}{ccccc} \text{Ausgangssystem} & & \text{2. System} & & \text{3. System} \\ & \longrightarrow & & \longrightarrow & \\ \mathbf{r} & & \alpha_1\mathbf{r} & & \alpha_2\mathbf{r}. \end{array}$$

Daraus folgt:

$$\frac{Y(\alpha_1)}{Y(1)} = \phi(\alpha_1), \tag{5}$$
$$\frac{Y(\alpha_2)}{Y(1)} = \phi(\alpha_2). \tag{6}$$

Das dritte System kann auch als ein Einheitensystem mit der um Skalenfaktor $\alpha' = \alpha_2/\alpha_1$ gegenüber dem 2. System veränderter Längeneinheit betrachtet werden. D.h.:

$$\frac{Y(\alpha_2)}{Y(\alpha_1)} = \phi\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right). \tag{7}$$

Vergleichen wir Gl'en (5), (6) und (7) so sehen wir, dass

$$\frac{\phi(\alpha_2)}{\phi(\alpha_1)} = \phi\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right). \tag{8}$$

Diese *Funktionalgleichung* wird wie folgt gelöst. Differenzieren wir Gl. (8) nach α_2, so wird sie zu:

$$\frac{\phi'(\alpha_2)}{\phi(\alpha_1)} = \frac{1}{\alpha_1}\phi'\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right).$$

Setzen wir nun $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, so erhalten wir eine Differentialgleichung für ϕ:

$$\frac{1}{\phi(\alpha)}\phi'(\alpha) = \frac{1}{\alpha}\phi'(1).$$

Die Lösung dieser Gleichung lautet

$$\ln\phi(\alpha) = l\ln\alpha + C$$

mit $l = \phi'(1)$; C ist die Integrationskonstante. Exponenzieren wir beide Seiten der Gleichung, so erhalten wir

$$\phi(\alpha) = A\alpha^l.$$

Die Konstante $A = \exp(C)$ ist dadurch festgelegt, dass $\phi(1) = 1$, d.h.

$$\phi(\alpha) = \alpha^l.$$

Die gleiche Überlegung kann auf die Situationen angewendet werden, wenn Y von Koordinaten, Massen und Zeiten abhängt. Auf diesem Weg beweist man die allgemeine Beziehung

$$\phi(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha^l\beta^t\gamma^m,$$

(mit α, β und γ die Skalenfaktoren von der Länge, Zeit und Masse), die als Interpretation der Beziehung (4) dient.

Wir betrachten nämlich drei Einheitensysteme gleichen Typs (z.B. drei MLT-Systeme) und diskutieren

$$\frac{Y_1}{Y} = \phi(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1),$$

$$\frac{Y_2}{Y} = \phi(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2),$$

und

$$\frac{Y_2}{Y_1} = \phi\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \frac{\beta_2}{\beta_1}, \frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right).$$

Es gilt:

$$\frac{\phi(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)}{\phi(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)} = \phi\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \frac{\beta_2}{\beta_1}, \frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right). \tag{9}$$

Die Lösung dieser Funktionalgleichung erfolgt in mehreren Schritten, jeder davon ist dem Lösungsweg von Gl. (8) ähnlich.

Differenzieren wir Gl. (9) nach α_2 und setzen wir $\alpha_2 = \alpha_1 = \alpha$, $\beta_2 = \beta_1 = \beta$ und $\gamma_2 = \gamma_1 = \gamma$, so erhalten wir

$$\frac{\frac{d}{d\alpha}\phi(\alpha, \beta, \gamma)}{\phi(\alpha, \beta, \gamma)} = \frac{1}{\alpha} \left.\frac{d}{d\alpha}\phi\right|_{\alpha=\beta=\gamma=1}.$$

Nehmen wir an, dass $\frac{d}{d\alpha}\phi\big|_{\alpha=\beta=\gamma=1} = l$, so erhalten wir die Lösung

$$\phi(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha^l A_1(\beta, \gamma),$$

da die Integrationskonstante A_1 von zwei weiteren Parametern abhängen kann. Setzen wir diese Lösung in Gl. (8) ein, so bekommen wir

$$\frac{\alpha_2^l}{\alpha_1^l}\frac{A_1(\beta_2, \gamma_2)}{A_1(\beta_1, \gamma_1)} = \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^l A_1\left(\frac{\beta_2}{\beta_1}, \frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right),$$

d.h.

$$\frac{A_1(\beta_2, \gamma_2)}{A_1(\beta_1, \gamma_1)} = A_1\left(\frac{\beta_2}{\beta_1}, \frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right). \tag{10}$$

Das ist eine Gleichung vom gleichen Typ wie unsere Gl. (8), aber mit einer Variablen weniger! Wiederholen wir die Prozedur (differenzieren nach β, setzen $\beta_2 = \beta_1 = \beta$ und $\gamma_2 = \gamma_1 = \gamma$), so bekommen wir die Differenzialgleichung für A_1,

$$\frac{\frac{d}{d\beta}A_1(\beta, \gamma)}{A_1(\beta, \gamma)} = \frac{t}{\beta}$$

mit $t = \frac{d}{d\beta}A_1(\beta, \gamma)\Big|_{\beta=\gamma=1}$. Die Lösung lautet

$$A_1(\beta, \gamma) = \beta^t A_2(\gamma).$$

Diese Lösung wird in Gl. (10) eingesetzt. Die Gleichung für A_2 folgt:

$$\frac{A_2(\gamma_2)}{A_2(\gamma_1)} = A_2\left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right).$$

Diese Gleichung ist wiederum vom Typ der Gl. (8) und ihre Lösung lautet

$$A_2(\gamma) = A\gamma^m.$$

Insgesamt erhalten wir

$$\phi(\alpha, \beta, \gamma) = A\alpha^l\beta^t\gamma^m.$$

Der Wert von A wird durch die Forderung $\phi(1, 1, 1) = 1$ festgelegt und ist $A = 1$.

2.2 Das Buckingham'sche Π-Theorem

Die Dimensionen von verschiedenen physikalischen Größen (Grundgrößen und auch abgeleiteten Größen) können unabhängig oder voneinander abhängig sein. Die Dimensionen von X, Y, Z u.s.w. sind unabhängig, wenn die Dimension von X nicht als monomale Form von Dimensionen von Y, Z u.s.w. dargestellt werden kann. Zum Beispiel ist die Dimension der Dichte $[\rho] = \mathrm{M/L^3}$ von den Dimensionen der Geschwindigkeit $[v] = \mathrm{L/T}$ und der Zeit T unabhängig; die Dimension der Beschleunigung $[a] = \mathrm{L/T^2}$ dagegen nicht. Es ist wichtig, dass die unabhängigen Größen ebenso als Grundgrößen eines Einheitensystems betrachtet werden können. So können wir z.B. die Masse, die Zeit und die Geschwindigkeit, oder die Masse, die Länge und die Beschleunigung als Grundgrößen wählen, und dann entsprechend die Länge oder die Zeit als abgeleitete Größen betrachten. Seien die m Grundgrößen a_i, $i = 1, 2, ..., m$ festgelegt (in der Mechanik $m = 3$), deren Dimensionen $[a_i] = \mathrm{A}_i$ sind. Dann sind die Dimensionen aller anderen physikalischen Größen a als $[a] = A_i^{p_1} A_2^{p_2} ... A_m^{p_m}$ darzustellen (was aus Gl. (4) folgt, wobei wir die Dimension der alten Grundgrößen durch die Dimensionen der neuen Grundgrößen ausdrücken).

Sei a die gesuchte physikalische Größe, die wir als Funktion der Größen $a_1, a_2, ..., a_n$ darstellen wollen:

$$a = f(a_1, a_2, ..., a_n).$$

Von diesen Größen haben die ersten k unabhängige Dimensionen (in der Mechanik $k = 3$), die Dimensionen der restlichen Größen sind von diesen k abhängig. Seien die Dimensionen all dieser Größen wie folgt:

$$\begin{array}{ll}
[a] = A_1^{p_1} A_2^{p_2} ... A_k^{p_k}, & \text{gesuchte Größe} \\
[a_1] = A_1, & \text{Grundgröße} \\
... & ... \\
[a_k] = A_k, & \text{Grundgröße} \\
[a_{k+1}] = A_1^{q_1} A_2^{q_2} ... A_k^{p_k}, & \text{abgeleitete Größe} \\
... & ... \\
[a_n] = A_1^{r_1} A_2^{r_2} ... A_n^{r_n}, & \text{abgeleitete Größe}
\end{array}$$

Ändert man die Einheiten von $a_1, ..., a_k$, so ändern sich die Zahlenwerte der Parameter wie folgt:

$$\begin{aligned}
a' &= \alpha_1^{p_1} \alpha_2^{p_2} ... \alpha_k^{p_k} a \\
a_1' &= \alpha_1 a_1 \\
&... \\
a_k' &= \alpha_k a_k \\
a_{k+1}' &= \alpha_1^{q_1} \alpha_2^{q_2} ... \alpha_k^{q_k} a_{k+1} \\
&... \\
a_n' &= \alpha_1^{r_1} \alpha_2^{r_2} ... \alpha_n^{r_n} a_n
\end{aligned}$$

Im neuen System gilt:

$$\begin{aligned}
a' &= \alpha_1^{p_1} \alpha_2^{p_2} ... \alpha_k^{p_k} a \\
&= \alpha_1^{p_1} \alpha_2^{p_2} ... \alpha_k^{p_k} f(a_1, ..., a_n) \\
&= f(\alpha_1 a_1, ..., \alpha_k a_k, \alpha_1^{q_1} \alpha_2^{q_2} ... \alpha_k^{q_k} a_{k+1}, ..., \alpha_1^{q_1} \alpha_2^{q_2} ... \alpha_k^{q_k} a_n)
\end{aligned}$$

Die zwei letzten Gleichungen definieren die notwendigen Homogenitätseigenschaften der Funktion f bezüglich den Skalenfaktoren. Nehmen wir jetzt die Skalenparameter gleich der inversen Zahlenwerten der Variablen a_1, ..., a_k:

$$\alpha_1 = \frac{1}{a_1}, ..., \alpha_k = \frac{1}{a_k}.$$

Die numerischen Werte der Parameter a, $a_{k+1}, ..., a_n$ sind dann durch

$$\begin{aligned}
a' = \Pi &= \frac{a}{a_1^{p_1} a_2^{p_2} ... a_k^{p_k}} \\
a'_{k+1} = \Pi_1 &= \frac{a_{k+1}}{a_1^{q_1} a_2^{q_2} ... a_k^{q_k}} \\
&... \\
a'_n = \Pi_{n-k} &= \frac{a_n}{a_1^{r_1} a_2^{r_2} ... a_k^{r_k}}
\end{aligned}$$

gegeben.

Betrachtet man nun die Dimension der Parameter $\Pi, \Pi_1, ..., \Pi_{n-k}$ als Funktionen von Variablen $a, ..., a_n$, so merkt man, dass diese dimensionslos sind. Die Zahlenwerte der Parameter $\Pi, \Pi_1, ..., \Pi_{n-k}$ hängen daher nicht von der Wahl der Skala der anfänglichen Größen ab.

Die Beziehung zwischen $n + 1$ dimensionsbehafteten Werten,

$$a = f(a_1, a_2, ..., a_n)$$

kann demnach als Beziehung zwischen $n + 1 - k$ dimensionslosen Kombinationen der Parameter $\Pi, \Pi_1, ..., \Pi_{n-k}$ dargestellt werden:

$$\Pi = f(1, ..., 1, \Pi_1, ..., \Pi_{n-k}) = f_1(\Pi_1, ..., \Pi_{n-k}),$$

d.h.

$$a = \underbrace{a_1^{p_1} a_2^{p_2} ... a_k^{p_k}}_{(1)} \underbrace{f_1(\Pi_1, ..., \Pi_{n-k})}_{(2)}. \tag{11}$$

Hier ist die Kombination (1) das Produkt der dimensional unabhängigen Parameter, das die richtige Dimension des gesuchten a hat, und die Funktion (2) ist die Funktion der aus diesen unabhängigen Parametern und der restlichen Parameter gebildeten dimensionslosen Kombinationen. Gl. (11) stellt die Aussage des Π-Theorems (Buckingham, 1914) dar.

2.3 Beispiele

2.3.1 Mathematisches Pendel

Nehmen wir an, wir wissen, aus welchen Gründen auch immer, dass die gesuchte Periode T, $[T] = \mathrm{T}$, der kleinen Schwingungen eines mathematischen Pendels nicht von ihrer Amplitude (maximaler Ausschag x) abhängt. Dann haben wir insgesamt 3 relevante Parameter: die Länge l des Pendels, $[l] = \mathrm{L}$, seine Masse m, $[m] = \mathrm{M}$, und die Beschleunigung

g, $[g] = \mathrm{L}/\mathrm{T}^2$. Diese drei sind unabhängig. Es gibt nur eine Kombination dieser Parameter mit der Dimension der Zeit. Betrachten wir die monomiale Form

$$\mathrm{T} = \mathrm{L}^\alpha \left(\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{T}^2}\right)^\beta \mathrm{M}^\gamma,$$

oder

$$\mathrm{T}^1 = \mathrm{L}^{\alpha+\beta}\mathrm{T}^{-2\beta}\mathrm{M}^\gamma.$$

Dann sehen wir, dass

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha + \beta \\ 1 &= -2\beta \\ 0 &= \gamma \end{aligned}$$

d.h. $\alpha = 1/2$, $\beta = -1/2$ und $\gamma = 0$, sodass

$$T \propto \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Angenommen, die Amplitude der Schwingungen ist auch gegeben. In diesem Fall haben wir einen zusätzlichen dimensionslosen Parameter

$$\Pi_1 = \frac{x}{l},$$

sodass

$$T = \sqrt{\frac{l}{g}} f\left(\frac{x}{l}\right).$$

Das vorherige Resultat bekommen wir, wenn $x/l \to 0$, da es keinerlei Grund gibt anzunehmen, dass $f(0) = 0$.

2.3.2 Fluss in einem Rohr

Hier ist ein Beispiel aus dem Ihnen weitgehend unbekannten Gebiet der Hydrodynamik.

Betrachten wir einen Fluss in einem Rohr unter Einwirkung des Druckgefälles $\nabla p = (p_2 - p_1)/l$. Der Druck ist die pro Flächeneinheit wirkende Kraft. Uns interessiert der Massenstrom Q, der durch die über den Querschnitt des Rohres gemittelte Geschwindigkeit v gegeben wird: $Q = \pi r^2 \rho v$. Die Dimensionen der wichtigen Parameter sind:

$$[Q] = \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{T}},$$

$$[\nabla p] = \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{L}^2\mathrm{T}^2},$$

und

$$[v] = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{T}}$$

sowie die Dichte ρ

$$[\rho] = \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{L}^3},$$

die Viskosität η,

$$[\eta] = \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{LT}}$$

und der Radius des Rohres r

$$[r] = \mathrm{L}.$$

Die Viskosität η ist eine wichtige Eigenschaft der Flüssigkeit, die ihre „Zähigkeit“ beschreibt: Honig hat eine höhere Viskosität als Wasser, Wasser hat eine höhere Viskosität als Luft. Sie wird im Experiment mit Hilfe von zwei Platten gemessen, wobei sich die obere Platte gegenüber der unteren mit der Geschwindigkeit v (relativ langsam) bewegt. Der Abstand zwischen den Platten ist L. Man hat festgestellt, dass die pro Flächeneinheit der oberen Platte wirkende Kraft (Scherspannung) proportional zu v und invers proportional zu L ist:

$$\frac{F}{A} \propto \frac{v}{L}.$$

Der Proportionalitätskoeffizient ist genau die Viskosität. Ihre Dimension ist aus der oberen Gleichung zu bestimmen:

$$\frac{\mathrm{ML/T^2}}{\mathrm{L^2}} = [\eta]\frac{\mathrm{L/T}}{\mathrm{L}}$$

und ist $[\eta] = \mathrm{M/LT}$ wie angegeben.

Bemerkung: Diese Diskussion ist ein bisschen anders als in der Vorlesung, wo ich die Diskussion an den Lösungsweg der Hausaufgabe angepasst habe!

Nur drei der fünf Parameter haben unabhängige Dimensionen, und es ist deswegen möglich, aus diesen zwei dimensionslose Kombinationen zu bauen. Nehmen wir z.B. ρ, v und r als solche unabhängige Parameter, so sind diese dimensionslosen Größen:

$$\Pi = \frac{\nabla p}{\rho^\alpha v^\beta r^\gamma} \quad \text{und} \quad \Pi_1 = \frac{\eta}{\rho^{\alpha_1} v^{\beta_1} r^{\gamma_1}}.$$

Das heißt:

$$\begin{aligned} \nabla p &= \Pi \rho^\alpha v^\beta r^\gamma \\ \eta &= \Pi_1 \rho^{\alpha_1} v^{\beta_1} r^{\gamma_1}. \end{aligned}$$

Lösen wir das System der algebraischen Gleichungen für α, β u.s.w., die aus diesen Beziehungen folgen:

$$[\nabla p] = \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{L^2T^2}} = \left(\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{L^3}}\right)^\alpha \left(\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{T}}\right)^\beta \mathrm{L}^\gamma,$$

$$[\eta] = \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{LT}} = \left(\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{L^3}}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{T}}\right)^{\beta_1} \mathrm{L}^{\gamma_1},$$

so erhalten wir

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 1 &=& \alpha \\ -2 &=& -3\alpha + \beta + \gamma \\ -2 &=& -\beta \end{array} \right. \quad \text{und} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} 1 &=& \alpha_1 \\ -1 &=& -3\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 \\ -1 &=& -\beta_1 \end{array} \right.$$

und $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = -1$, $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = 1$ und $\gamma_1 = 1$. Laut Π-Theorem Gl. (11) bekommen wir nun $\Pi = f(\Pi_1)$ oder

$$\frac{p_2 - p_1}{l} \frac{r}{\rho v^2} = f\left(\frac{\eta}{\rho v r}\right). \tag{12}$$

Das Argument der Funktion auf der rechten Seite der Gleichung ist nichts anderes als die inverse Reynolds-Zahl:

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho v r}{\eta}.$$

Die Funktion f ist unbekannt, allerdings muss man sagen: *„Wir haben viel gelernt!“*

Betrachten wir z.B. die Bewegung mit sehr kleinen Geschwindigkeiten (kleinen Reynoldszahlen), bei der sich alle Teilchen der Flüssigkeit mit konstanten Geschwindigkeiten auf geraden Bahnen entlang des Rohrs bewegen. Eine solche Bewegung heißt laminar. Die Beschleunigung der Teilchen verschwindet, und deswegen können ihre Massen (und damit auch die Dichte der Flüssigkeit) keine Rolle spielen! Das ist nur der Fall, wenn die Funktion $f(x)$ eine lineare Funktion ihres Arguments ist: $f(x) = \mathrm{const} \cdot x$. Setzen wir diese Funktion in Gl. (12) ein und lösen wir diese nach v auf, so erhalten wir

$$v = \mathrm{const} \cdot \frac{p_2 - p_1}{\eta l} r^2,$$

weshalb für den Massenstrom $Q = \pi r^2 \rho v$ folgt:

$$Q = \mathrm{const} \cdot \pi \frac{p_2 - p_1}{\eta l} r^4.$$

Das einzige, dass wir mit diesem Zugang nicht bekommen haben, ist der numerische Faktor $\mathrm{const} = 1/8$!

Im Allgemeinen ist die Abhängigkeit des Massenstromes Q (oder der über den vertikalen Schnitt des Rohres gemittelten Geschwindigkeit v) von dem Parameter komplex, aber es ist wichtig, dass dieser eine Funktion von einen einzigen Parameter Re ist, und diese Funktion kann experimentell ermittelt werden. Dabei reicht es vollkommen, nur ein Rohr und eine Flüssigkeit zu untersuchen!

Die gleiche Überlegung gilt z.B. für die Widerstandskraft F, die auf eine Kugel einwirkt, die sich mit der Geschwindigkeit v in einer Flüssigkeit bewegt (Hausaufgabe). Die Parameter sind hier praktisch dieselben:

$$[\mathrm{F}] = \mathrm{ML/T^2}$$

und

$$[v] = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{T}}$$

der Radius der Kugel

$$[r] = \mathrm{L}$$

sowie die Dichte ρ

$$[\rho] = \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{L}^3},$$

die Viskosität η

$$[\eta] = \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{LT}}$$

der Flüssigkeit. Hier kann

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho v r}{\eta}.$$

ebenfalls als einzige dimensionslose Kombination der Parameter angesehen werden, die das gesuchte Druckgefälle nicht einschließt. (Die *kinematische Viskosität* $\nu = \eta/\rho$ ist $\simeq 1.5 \cdot 10^{-5}$ m^2/s für die Luft bei 20°C und $\simeq 10^{-6}$ m^2/s für das Wasser bei 20°C.) Die gleichen Überlegungen gelten für Körper von geometrisch ähnlicher Form aber unterschiedlichen Größen, die sich mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten bewegen. Hier sind einige typische Größenordnungen für Reynoldszahlen:

Objekt	Reynoldszahl Re
Bakterien	10^{-4}
Fliegen	10^2
Blut in einem großen Gefäß	10^3
Schwimmer	10^6
Großes Schiff / Flugzeug	10^9

Für Flugzeuge und Schiffe kommt allerdings noch jeweils ein anderer dimensionsloser Parameter in Frage: Durch die Bewegung von einem solchen Objekt in einem Fluid (d.h. in einem flüssigen oder gasförmigen Medium) können Wellen erzeugt werden: Im Fall vom Flugzeug sind das die Schallwellen (Geschwindigkeit $v = c_S$, Schallgeschwindigkeit, praktisch konstant), im Fall vom Schiff sind das die Oberflächenwellen in tiefem Wasser (Geschwindigkeit hängt stark von der Wellenlänge λ ab, $v \propto \sqrt{g\lambda}$). Deswegen gibt es entsprechende zusätzliche dimensionslose Parameter:

- Mach-Zahl $\mathrm{Ma} = v/c_S$ beim Flugzeug
- Froude-Zahl $\mathrm{Fr} = v/\sqrt{gL}$ beim Schiff

2.3.3 Bohrscher Radius

Eine andere wichtige Anwendung der Dimensionsanalyse bezieht sich auf die Ermittlung der intrinsischen *charakteristischen Skalen* des Systems.

Das Wasserstoffatom besteht aus einem Elektron und einem Proton, dessen Masse m_P als sehr groß verglichen mit der Elektronenmasse m_e angenommen werden kann ($\zeta = m_e/m_p \approx 1/1836$). Das Kepler-Problem in einem Wasserstoff-Atom (Coulomb-Wechselwirkung) hat demnach folgende festgelegte Parameter:

- Masse m_e des Elektrons (oder entsprechende reduzierte Masse) mit Dimension M
- die Elektronenladung e, deren Dimension von der Wahl des Einheitensystems abhängig ist.

In rein-mechanischen *cgs*-System (LMT-System) ist diese durch das Coulomb-Gesetz in der Form

$$F = \frac{q^2}{r^2}$$

gegeben. Daher $[q] = \mathrm{M}^{1/2}\mathrm{L}^{3/2}\mathrm{T}^{-1}$. In SI (LMTI-System) gibt es eine zusätzliche Fundamentalgröße, Strom I (in Amper gemessen); die Dimension der Ladung ist $[q] = \mathrm{IT}$, das Coulomb-Gesetz erhält ein zusätzlichen, dimensionsbehafteten Umrechnungskoeffizienten $1/4\pi\varepsilon_0$:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{r^2}.$$

Die Dimension von ε_0 ist demnach $[\varepsilon_0] = \mathrm{M}^{-1}\mathrm{L}^{-3}\mathrm{T}^4\mathrm{I}^2$. Aus e und m_e (in *cgs*), oder aus e, m_e und ε_0 (in SI) kann man keine Kombination mit der Dimension der Länge bilden: in einem klassischen Problem gibt es keine Fundamentallänge. Die Längenskala der Bewegung ist durch Anfangsbedingung festgelegt.

1899 hat Max Planck verstanden (und postuliert), dass es eine Naturkonstante gibt, die, wie wir jetzt wissen, die Effekte auf sehr kleinen Skalen regelt: die Plancksche Konstante h. Diese hat die Dimension $[h] = \mathrm{ML}^2\mathrm{T}^{-1}$ (die Dimension der *Wirkung*, die gleiche wie Drehimpuls). Aus den Naturkonstanten e, m_e und h (in *cgs*) oder e, m_e, ε_0 und h (in SI) kann man eine charakteristische Länge bilden: den Bohrschen Radius

$$a_0 \propto \frac{h^2}{me^2} \quad \text{(in cgs)}$$

oder

$$a_0 \propto \frac{\varepsilon_0 h^2}{me^2} \quad \text{(in SI)}.$$

Die Rolle, die die Plancksche Konstante h in der Atomphysik spielen würde, wurde 1910/11 von dem österreichischen Physiker A.E. Haas erkannt, *vor* der Einführung des Bohrschen Atommodells und 15 Jahre *vor* der Formulierung der Quantenmechanik.

Bemerkung: Der numerische Wert von $h \approx 6.6 \cdot 10^{-34}\mathrm{J} \cdot \mathrm{s}$ ist „klein", und a_0 ist $a_0 \approx 0.53 \cdot 10^{-10}\mathrm{m}$.

Für Interessierte. Finden Sie das Analogon des Bohrschen Radius für das Kepler-Problem (Gravitationswechselwirkung). Wie groß ist diese für das Sonne-Erde-System? Welche Schlussfolgerungen können Sie daraus ziehen?

2.3.4 Plancksche Skalen

Die Naturkonstanten h (Plancksche Konstante) mit der Dimension $[h] = \mathrm{ML}^2/\mathrm{T}$, γ (Gravitationskonstante) mit der Dimension $[\gamma] = \mathrm{L}^3/\mathrm{MT}^2$ und c (Lichtgeschwindigkeit) mit der Dimension $[c] = \mathrm{L}/\mathrm{T}$ haben unabhängige Dimensionen, und können als Grundgrößen eines Einheitensystems benutzt werden, wie es von Max Planck in 1899 vorgeschlagen wurde (vor der Formulierung der Quantenmechanik und der Relativitätstheorie!).

Die Werte von diesen Naturkonstanten legen die charakteristischen Skalen fest, auf denen die Quanteneffekte in Gravitation eine Rolle spielen können. Diese sind

$$\begin{aligned}
m_p &= \sqrt{\frac{\hbar c}{\gamma}} = 2.17 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{kg} \quad \text{(Plancksche Masse)}, \\
l_p &= \sqrt{\frac{\hbar \gamma}{c^3}} = 1.62 \cdot 10^{-35}\ \mathrm{m} \quad \text{(Plancksche Länge)}, \\
t_p &= \sqrt{\frac{\hbar \gamma}{c^5}} = 5.39 \cdot 10^{-44}\ \mathrm{s} \quad \text{(Plancksche Zeit)}.
\end{aligned}$$

Das Kürzel $\hbar = h/2\pi$ ist die Standardnotation. Es wird angenommen, dass der Raum und die Zeit auf den entsprechenden Skalen anders geartet sind, als auf den uns üblichen Skalen, und deren Beschreibung neue Theorien erfordert (Quantengravitation).